A N A L I Z A   F U N K C J O N A L N A

WPPT IV

Galowice, 28 marca 2013

Lista 18

ZADANIE 1. (z wykładu) Udowodnij, że jeśli T_n jest ciągiem operatorów ograniczonych z przestrzeni Banacha X w przestrzeń unormowaną Y i zbiega on punktowo do operatora T, to zbieżność ta jest niemal jenostajna.
Wsk. Wystarczy rozważać przypadek gdy T jest operatorem zerowym.

ZADANIE 2. Wiemy, że ℓ^1 jest (jako zbiór) podzbiorem ℓ^2 (ciąg nieujemny sumowalny jest tym bardziej sumowalny z kwadratem). Udowodnij, że jest to zbiór I kategorii w normie ℓ^2.
Wsk. Rozważ zbiór funkcjonałów na ℓ^2 postaci $\langle \cdot, z\rangle$, gdzie z przebiega zbiór wszystkich ciągów z ℓ^2, których wyrazy mają moduły ograniczone przez 1.

ZADANIE 3. Wiemy, że $L^2([0,1])$ jest (jako zbiór) podzbiorem $L^1([0,1])$ (na odcinku każda funkcja nieujemna całkowalna z kwadratem jest tym bardziej całkowalna bez kwadratu). Udowodnij, że jest to zbiór I kategorii w normie $L^1([0,1])$.
Wsk. Rozważ zbiór funkcjonałów na $L^1([0,1])$ zadanych (poprzez całkę z iloczynu) przez funkcje g ograniczone, których normy w $L^2([0,1])$ są ograniczone przez 1. Wykazanie, że dla $f \in L^1([0,1]) \setminus L^2([0,1])$ wartości tych funkcjonałów są nieograniczone wymaga pomysłowego dobrania funkcji g.

ZADANIE 4. Niech T_n będzie ciągiem operatorów liniowych ciągłych z przestrzeni Banacha X w przestrzeń Banacha Y. Pokazać, że zbiór

$$\{x \in X : \lim_n T_n x \text{ istnieje}\}$$

jest albo równy X albo jest I kategorii.
Wsk. Założyć, że zbiór z zadania nie jest I kategorii. Wywnioskować, posiłkując się tw. B-S, że jest on wtedy domknięty. Domknięty zbiór nie I kategorii zawiera kulę otwartą. Ponadto zbiór ten jest zawsze przestrzenią liniową. Połączyć te fakty.

ZADANIE 5. Podaj przykład szeregu postaci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n$, gdzie $\mathcal{B} = \{e_n : n \geq 0\}$ jest bazą w $V = L^2([0,1])$, który zbiega do zera prawie wszędzie, ale nie wszystkie współczynniki są zerami (czyli brak jednoznaczności rozwinięcia w szereg, jeśli dopuścimy zbieżność p.w. zamiast zbieżności w normie).

ROZWIĄZANIE: Podzielmy $[0,1)$ na rozłączne przedziały A_k postaci $A_1 = [0, \frac{1}{2})$, $A_2 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, $A_3 = [\frac{3}{4}, \frac{7}{8})$, ... (tak, że $\lambda(A_k) = 2^{-k}$). Niech $e_0 = \mathbf{1}$ i dla $k \geq 1$ niech $e_k = 0$ na $A_1, A_2 \ldots, A_{k-1}$, $e_k = -2^{\frac{k-1}{2}}$ na A_k i $e_k = 2^{\frac{k-1}{2}}$ na reszcie (na przykład e_1 jest -1 na A_1 i 1 na reszcie, a e_2 jest 0 na A_1, $-\sqrt{2}$ na A_2 i $\sqrt{2}$ na reszcie). Łatwo sprawdzić, że układ $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ jest ortonormalny. Łatwo też sprawdzić, że dla każdego n suma

$$e_0 + \sum_{n=1}^{k} 2^{\frac{n-1}{2}} e_n$$

zeruje się na zbiorach $A_1, A_2, \dots, A_k$ (a na reszcie jest stała 2^k). A zatem szereg

$$e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{n-1}{2}} e_n$$

jest zbieżny prawie wszędzie do zera. Jednak współczynniki $a_0 = 1$ i $a_n = 2^{\frac{n-1}{2}}$ (dla $n \geq 1$) są niezerowe. Teraz wystarczy układ ortonormalny $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ uzupełnić do bazy, a wtedy nasz szereg można zastąpić szeregiem nad bazą (tyle, że współczynniki przy dodanych wektorach będą zerami, ale to nie będą wszystkie).

ZADANIE 6. Udowodnij, że w ustalonym punkcie $z \in \mathbb{T}$ różnym od 1 wartości jąder Dirichleta $D_n(z)$ tworzą ciąg ograniczony (ale nie zbieżny).

Wsk. Zapis $D_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n} z^k + \sum_{k=1}^{n} z^{-k}$ *sprowadza problem do ograniczoności sum* $\sum_{k=1}^{n} z^k$. *Z interpretacji graficznej wywnioskuj, że sumy te ,,wędrują" po pewnym okręgu (a więc są ograniczone). Dla ułatwienia: jeśli z jest pierwiastkiem z jedynki, to sumy te leżą na wielokącie foremnym. W pozostałych przypadkach leżą one gęsto na pewnym okręgu. Dla z bliskich 1 promień okręgu jest bardzo duży, a w 1 osiąga nieskończoność (i sumy te wędrują po prostej).*

ZADANIE 7. Ponieważ ciąg $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ należy do ℓ^2, więc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ jest szeregiem Fouriera pewnej funkcji $f \in L^2(\lambda)$ (na $\mathbb{T}$), innymi słowy jest on zbieżny do f w normie $L^2(\lambda)$. Szereg ten nie jest zbieżny punktowo (na przykład w $z_0 = 1$ jest on ewidentnie rozbieżny). Czy jest on zbieżny w każdym innym punkcie na $\mathbb{T}$?

Wsk. Skorzystaj z zadania poprzedniego i zauważ, że ,,wędrowanie" odbywa się po zacieśniającej się trajektorii.

Tomasz Downarowicz